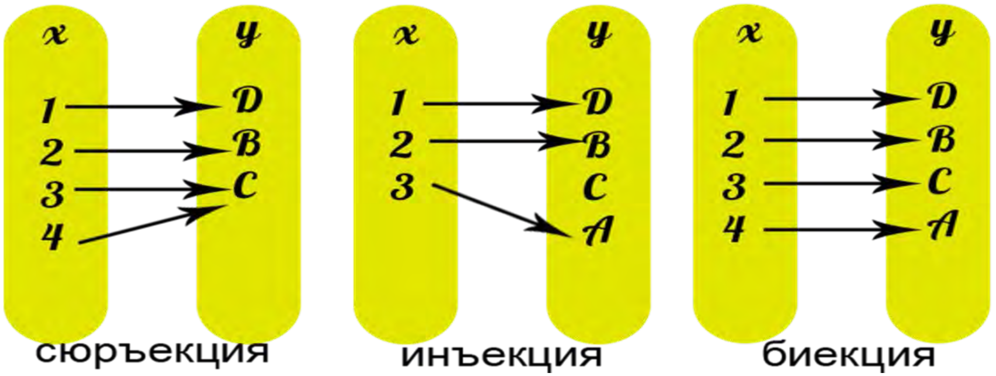
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж

Тема урока:

Соответствия между множествами. Отображения.



Автор: Савинова Лариса Николаевна,
преподаватель математических дисциплин

Цели и задачи урока:

- изучить основные понятия: соответствие между множествами, образ, прообраз, полный образ и полный прообраз элемента, множество значений и область определения соответствия;
- рассмотреть способы задания отображений;
- описать классификацию отображений по мощности;
- привести примеры отображений;
- научиться иллюстрировать сюръекцию, инъекцию биекцию;
- содействовать развитию математического мышления студентов, побуждать их к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности;
- развивать культуру устной математической речи, чувство самоконтроля.

1. Основные понятия

Пусть даны два множества $\boldsymbol{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $\boldsymbol{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$. Тогда пары (a_i, b_j) задают **соответствие** между множествами *A* и *B*, если указано правило *R*, по которому для элемента a_i множества A выбирается элемент b_j из множества B.

Например, соответствие между элементами множеств $x \in R$ и $y \in R$ задает точечное множество $(x_i; y_j)$ координат точек на плоскости; русско-английский словарь устанавливает соответствие значений и написаний слов русского и английского языков.

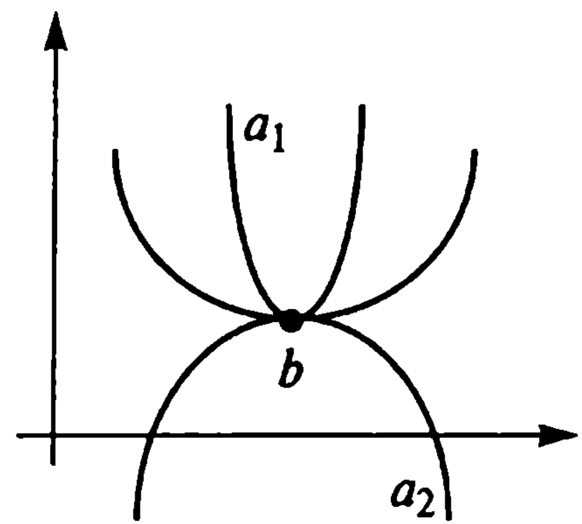
Пусть задано соответствие R между множествами A и B, т. е. R: $(a; b)$, $a \in A$, $b \in B$. Для некоторого элемента a множества A поставлен в соответствие некоторый элемент b из множества B, который называется **образом** элемента a и записывается $b = R(a)$.

Тогда $a = R^{-1}(b)$ — **прообраз** элемента $b \in B$ при соответствии R, который обладает свойствами единственности и полноты:

- каждому прообразу соответствует единственный образ;
- образ должен быть полным, так же как полным должен быть и прообраз.

Множество $\boldsymbol{B_a} = \{b \mid b = R(a)\}$ называется **полным образом** элемента $\underline{a}$ (при этом, $B_a \subset B$), а множество $\mathrm{A}_{\boldsymbol{b}} = \{a \mid R(a) = b\} \subset A$ называется **полным прообразом** элемента $\underline{b}$ при соответствии $\underline{R}$.

Пример. Если A – множество парабол, B – множество точек плоскости, а R – соответствие «вершина параболы», то $R(a)$ – точка, являющаяся вершиной параболы $\underline{a}$, а $R^{-1}(b)$ состоит из всех парабол ai с вершиной в точке $\underline{b}$ (рис. 1).



Образ множества A при соответствии R называется **множеством значений** этого соответствия и обозначается $R(A)$, если $R(A)$ состоит из образов всех элементов множества A.

Запись: $R(A) = \{b \mid \forall a \in A, b = R(a)\}$.

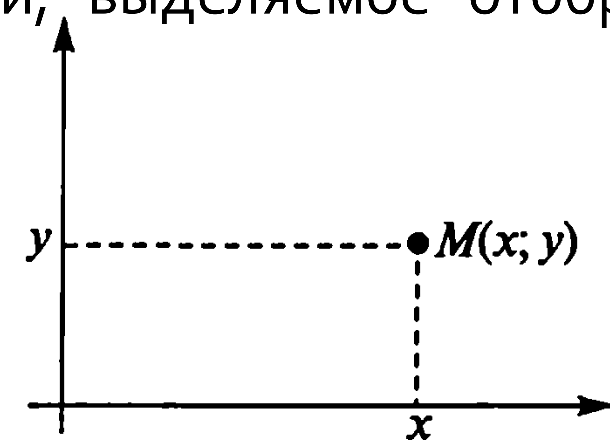
Прообраз множества B при некотором соответствии R называют **областью определения** этого соответствия и обозначают $R^{-1}(B)$, т.е.

$$R^{-1}(B) = \{a | \forall\, b \in B, \exists a \in A: R(a) = b\};$$

R^{-1} является **обратным** соответствием для R.

Так, для соответствия *R*, заданного точками координатной плоскости, областью определения является множество точек оси абсцисс, а множеством значений — проекции точек на ось ординат (рис. 2). Поэтому для некоторой точки $M(x;y)$ $\underline{y}$ является образом, а x — прообразом при некотором соответствии R: $Y= R(X)$, $X = R^{-1}(Y)$. Соответствие между множествами X, $Y \in R$ удобно представить в виде точки на плоскости с помощью метода декартовых координат.

Пусть задано соответствие *R* и *Y= R(X).* Ему соответствует точка $M\,(x;\,y)$ (см. рис. 2). Тогда множество точек плоскости, выделяемое отображением *R*, будет графиком.



2. Задание отображений

Для описания соответствий между множествами используют понятие **отображения (функции)** одного множества на другое.

Соответствие, при котором каждому из элементов множества A (X) сопоставляется единственный элемент из множества B (Y), называется *отображением*.

Для задания отображения необходимо указать:

- множество, которое отображается (**область определения** данного отображения, обозначается X=D(f));
- множество, в (на) которое отображается данная область определения (**множество значений** этого отображения, часто обозначается Y=E(f));
- **закон** или соответствие между этими множествами, по которому для элементов первого множества (прообразов, аргументов) выбраны элементы (образы) из второго множества. Приняты записи

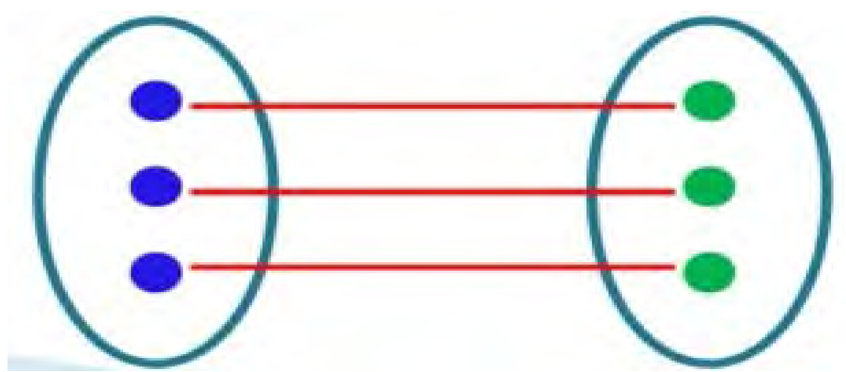
$$X \xrightarrow{f} Y \text{ или } A \xrightarrow{f} B \text{ или } f : A \to B$$

При записи $f : A \to B$ подразумевается, что отображение *f* определено *всюду* на *A*, т.е. *A* – полный прообраз отображения *f,* хотя для *B* такое свойство полноты не подразумевается.

Множество $\Gamma(f)$ называется графиком отображения.

$$\Gamma(f)=\{(x,y)\in X\times Y,\ y=f(x),\ \forall x\in X,\ y\in Y\}$$

Однозначным (взаимно однозначным) называется отображение, где каждому аргументу поставлено в соответствие не более одного образа, или каждому элементу первого множества соответствует единственный элемент второго множества.



Пример.

Даны два множества:

X={с,е,н,т,я,б,р,ь} и Y={1,2,3,4,5,9,10,11}.

Отображение из множества X в множество Y имеет следующий вид:

{с, е, н, т, я, б, р, ь}

↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕

{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11}

Совокупность всех элементов из множества X, образом которых является y из Y, называется *полным прообразом* y из X. Обозначается: $f^{-1}(y)$.

Пусть A⊂X. Совокупность всех элементов f(a), a∈A, называется *полным образом* множества A при отображении f.

Пусть B⊂Y. Множество всех элементов из X, образы которых принадлежат множеству B, называется полным прообразом множества B.

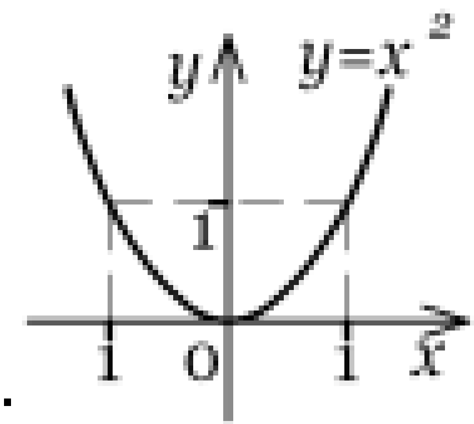
Пример. $X=Y=R$, $y=x^2$.

$A=[-1;1]\subset X$

Полный образ $f(A)=[0;1]$

$B=[0;1]\subset Y$

Полный прообраз $f^{-1}(B)=[-1;1]$.



Способы задания отображений

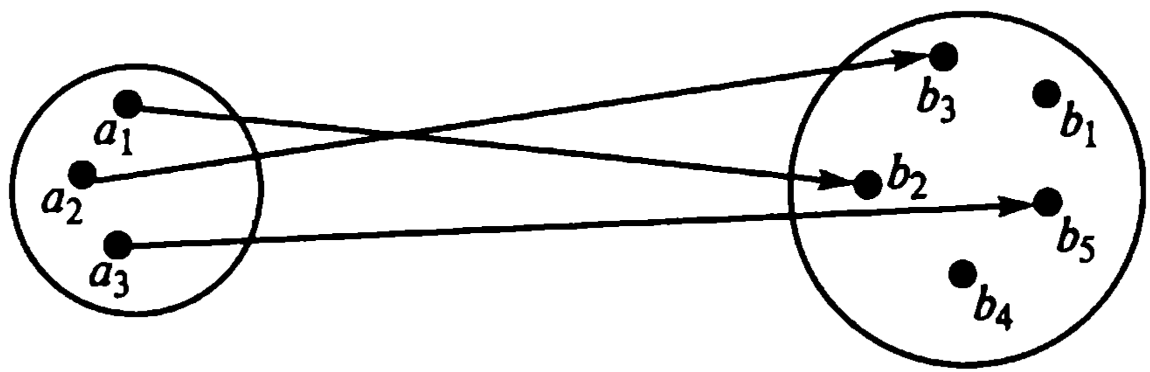
- **Аналитический** – способ задания отображения в виде формул. Переменная, вместо которой надо подставлять элемент из области определения, называется **аргументом функции**. При этом явно указывается процедура вычисления значения f(x) функции f на аргументе x.
- Для задания отображения множеств **табличным способом** принято строить таблицу, в которой первую строку составляют элементы области определения (прообразы вида *a*), а вторую строку—их образы, т. е. элементы вида *γ(x)* при отображении γ: $a \to \gamma(a)$,

где $a \in A$ (табл.). Такой способ удобен при достаточно малой мощности прообраза (не более 10).

x	a_1	a_2	…	a_n	…
$\gamma(x)$	$\gamma(a_1)$	$\gamma(a_2)$	…	$\gamma(a_n)$	…

Способы задания отображений:

- Графическое представление отображения связано со стрелочными схемами (диаграммами или **графами**). На рисунке показан пример графического задания отображения множества $\boldsymbol{A}=\{a1,\ a2,\ a3\}$ в $\boldsymbol{B}=\{b1, b2, b3, b4, b5\}$.



- Отображения $f : A \to B$ и $g : A \to B$ называются **равными**, если $\forall x \in A \quad f(x) = g(x)$.

3. Виды отображений

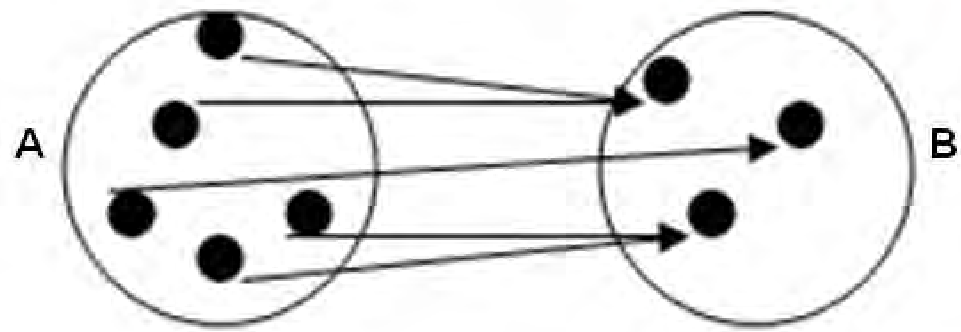
Различают два основных вида однозначных отображений (функций). По мощности они делятся на **сюръективные и инъективные**.

Отображения

На множество
«сюръекция»
Соответствие, при котором каждому элементу множества A указан *единственный* элемент множества B, а каждому элементу множества B можно указать *хотя бы* один элемент множества A, называется отображением множества A **на** множество B

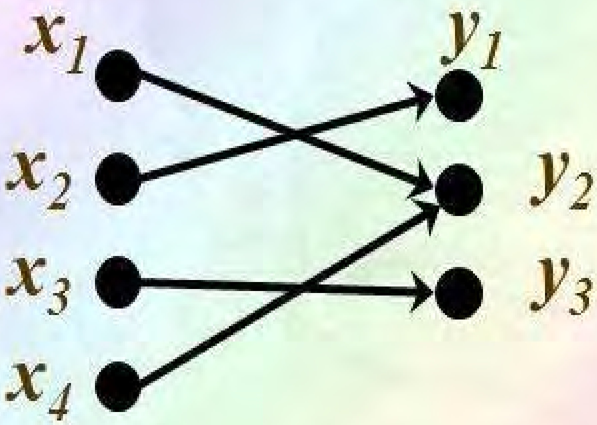
Во множество
«инъекция»
Соответствие, при котором каждому элементу множества A соответствует *единственный* элемент множества B, а каждому элементу B соответствует *не более* одного прообраза из A, называется отображением множества A **во** множество B

На множество - «сюръекция»

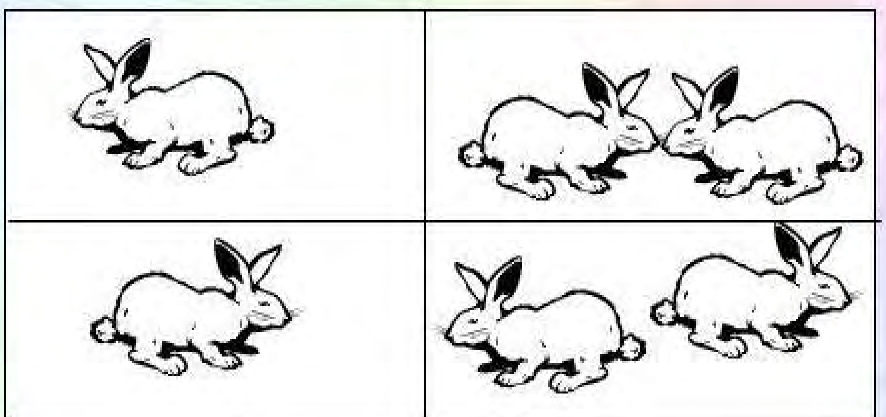


Соответствие. при котором каждому элементу множества *A* указан *единственный* элемент множества *B*, а каждому элементу множества *B* можно указать *хотя бы* один элемент множества *A*, называется отображением множества *A* **на** множество *B*

Пример.

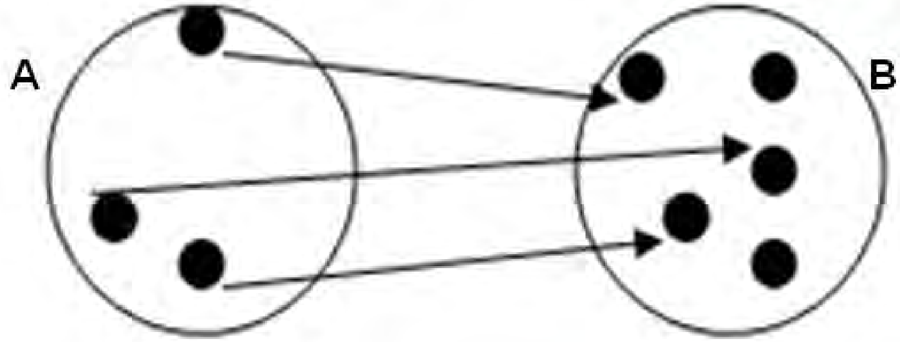


Пример сюръективного отображения



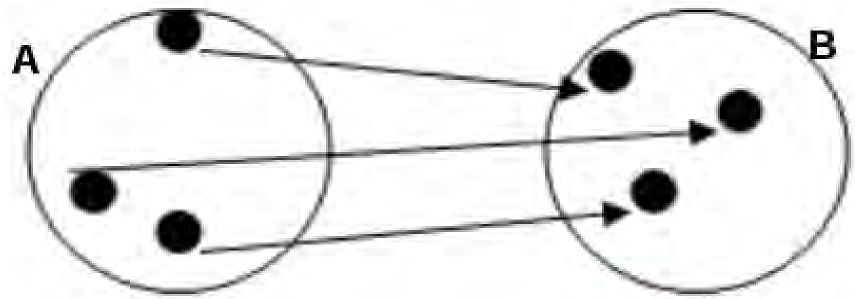
Сюръективное отображение “Кролик - Клетка”;
$|X|=6$, $|Y|=4$

Во множество - «инъекция»

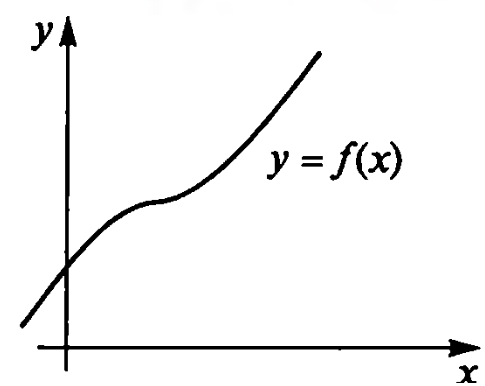


Соответствие. при котором каждому элементу множества *A* указан *единственный* элемент множества *B*, а каждому элементу *B* соответствует *не более* одного прообраза из *A*, называется отображением множества *A* **во** множество *B*.

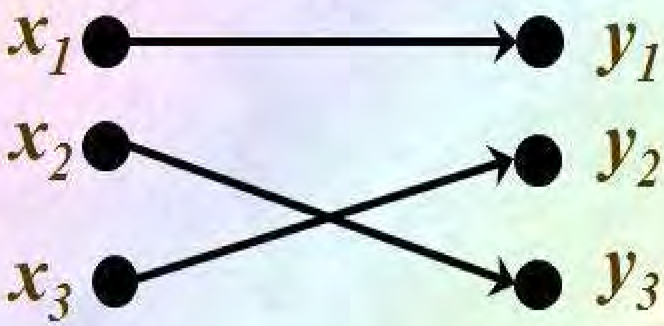
На множество - **«биекция»**



Отображение множества А **на** множество В, при котором каждому элементу множества В соответствует единственный элемент множества А, называется **взаимно-однозначным** соответствием между двумя множествами, или **биекцией**.

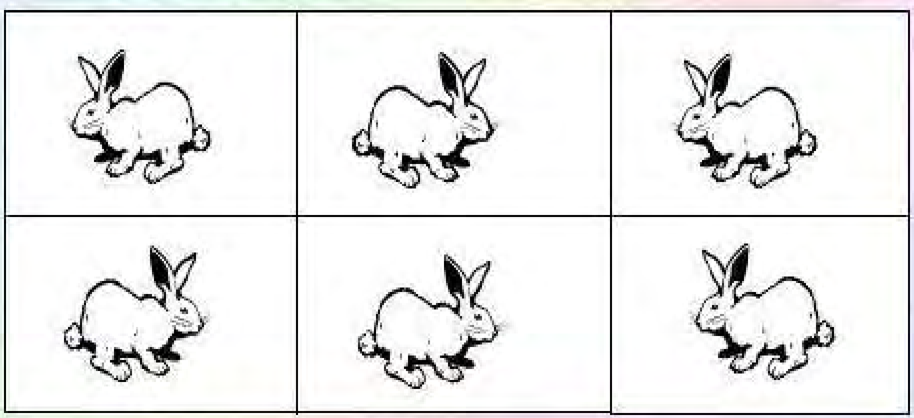


Пример.



Пример биективного отображения

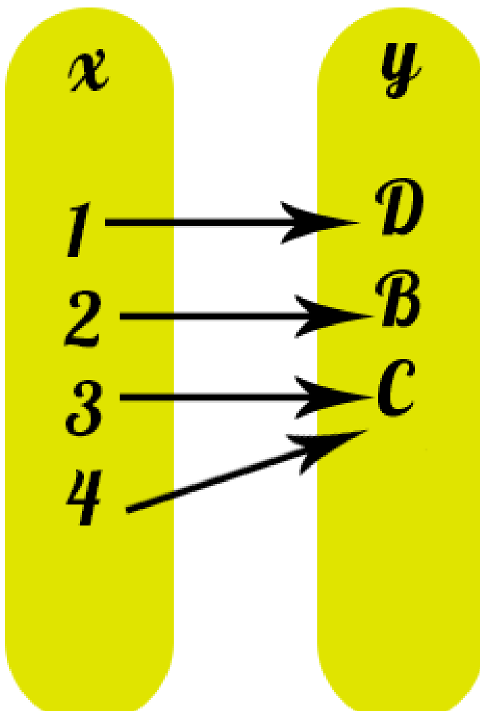
Биективное отображение f: $X \to Y$ осуществляет взаимно однозначное отображение между множествами X и Y, поэтому $X \sim Y$, $|X| = |Y|$



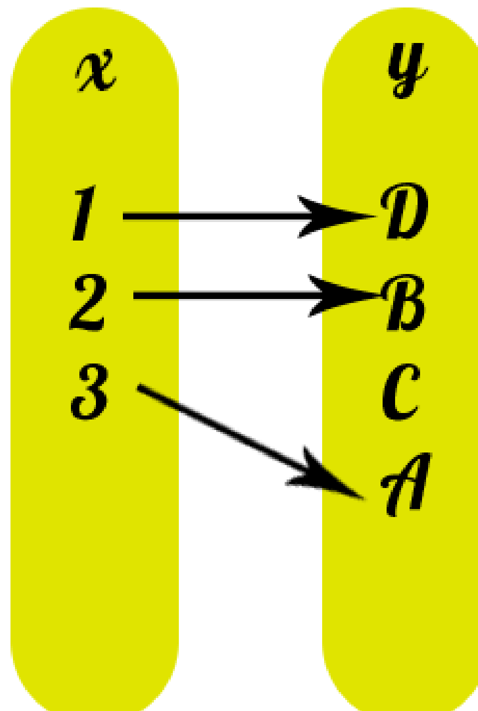
Биективное отображение "Кролик - Клетка";

$|X| = 6$, $|Y| = 6$

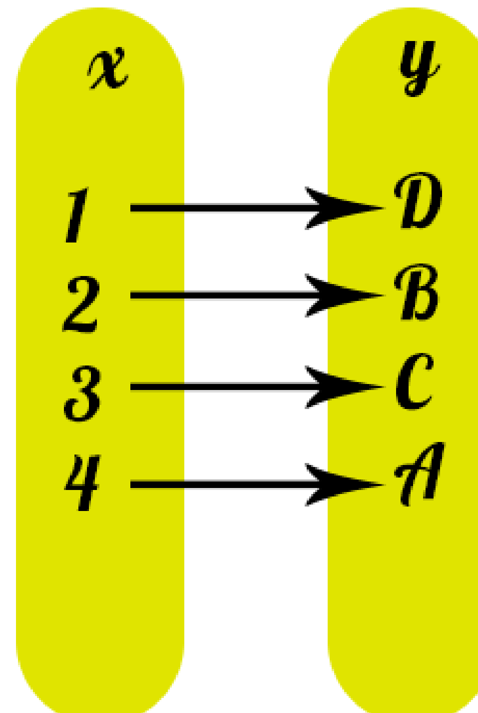
Итак,



сюръекция



инъекция



биекция

Взаимно однозначное соответствие

1. Если каждому элементу множества А можно поставить в соответствие один и только один элемент множества В и, наоборот, каждому элементу множества В можно поставить в соответствие один и только один элемент множества А, то такое соответствие между множествами А и В называется *взаимно однозначным.*

2. Если между множествами А и В можно установить взаимно однозначное соответствие (ВОС), то такие множества называются эквивалентными (равносильными).

3. Установление (ВОС) дает возможность сравнивать множества с бесконечным числом элементов. Например, между множеством **N натуральных чисел и множеством всех четных натуральных чисел можно установить (ВОС):**

Таким образом, эти два множества равносильны

1	2	3	4	5	6	7 ………	n
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	4	6	8	10	12	14 ……	2n

Пусть множество A отображается ***взаимно-однозначно*** на множество B, т.е. $f: A \to B$. Тогда отображение , при котором каждому элементу множества B ставится в соответствие его прообраз из множества A, называется **обратным отображением** для f и записывается $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ или $f^{-1}: B \to A$.

Так как одному образу при биекции соответствует в точности один прообраз, обратное отображение будет определено всюду на *B* и однозначно.

Для биекции принята запись:

$$A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B.$$

Говорят, что между двумя множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие *f***, если элементы этих множеств можно представить в виде пар (a_i, b_k) , для которых выполняются два условия:

1) $\forall a_i \in A\ \exists b_k \in B$ так, что $f(a_i) = b_k$;
$\forall b_j \in B\ \exists a_l \in \text{A}$ так, что $f(a_l) = b_j$:

все элементы множеств попали хотя бы в одну из пар;

2) каждый элемент a_i, b_i попал только в одну из пар.

Если между элементами множеств установлено взаимно-однозначное соответствие, то эти множества имеют одинаковое количество элементов. Говорят, что они **равносильны, равномощны,** или **эквивалентны**.

- На рисунке показаны примеры прямого и обратного биективного отображения.

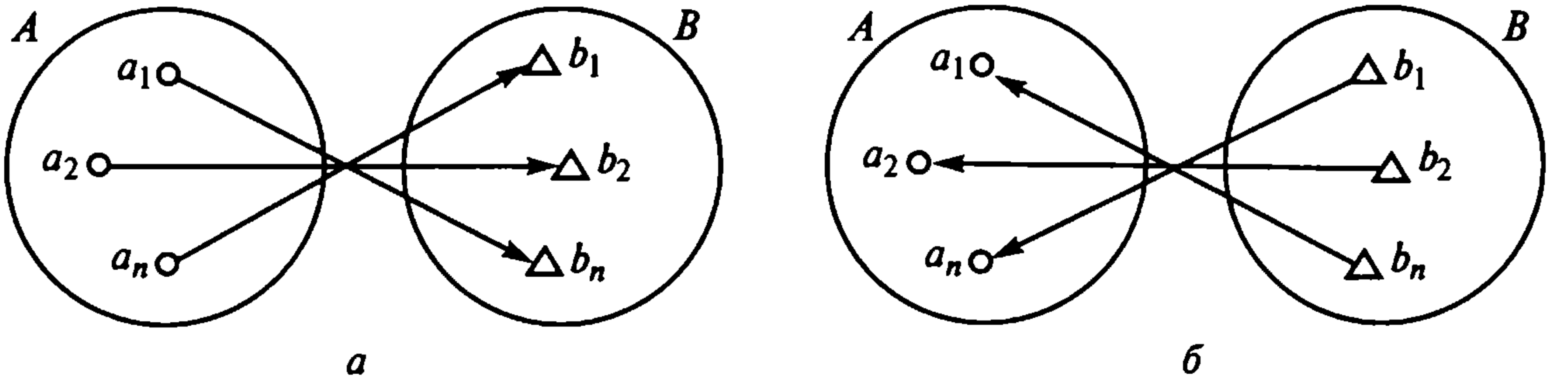


Рис. 1.7. Иллюстрация биекции:

а — прямое отображение *A* в *B*; *б* — обратное отображение *B* в *A*

Примеры отображений

1. Отображение $\gamma: a \to \frac{a}{2}$, где $a \in$ Z, является биекцией множества *Z* целых чисел на некоторое множество *B*. Табличное задание такой биекции можно представить в виде:

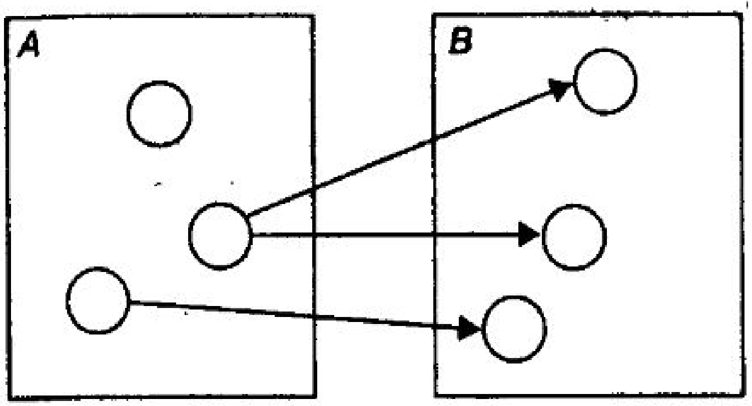
x	...	–2	–1	0	1	2	...
$\gamma(x)$	...	–1	–0,5	0	0,5	1	...

Из таблицы видно, что каждому элементу множества *Z* ставится в соответствие единственный элемент множества *B*. И наоборот, каждому элементу множества *B* можно поставить в соответствие единственный элемент из *Z*. Обратное отображение можно представить аналитически: $\gamma^{-1}: a \to 2a$ и таблично, поменяв местами строки в таблице.

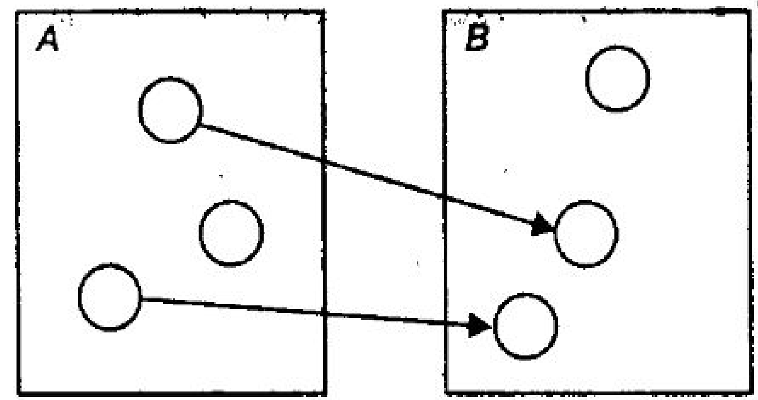
Примеры отображений

2. Каждому действительному числу поставим в соответствие его квадрат. Отображение $x \to x^2$ **не является** взаимно-однозначным соответствием, т.к. для любого образа $y = x^2$ можно найти два прообраза в области определения: $x = +\sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$.
3. Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами слов английского и русского языков. Такое соответствие **не является** однозначным, т.к. каждому английскому понятию соответствуют различные варианты перевода на русский язык, и наоборот.
4. Различные виды кодирования (азбука Морзе, представление чисел в различных системах счисления, шифрованные сообщения) **являются** чаще всего примерами взаимно-однозначного соответствия между множествами.

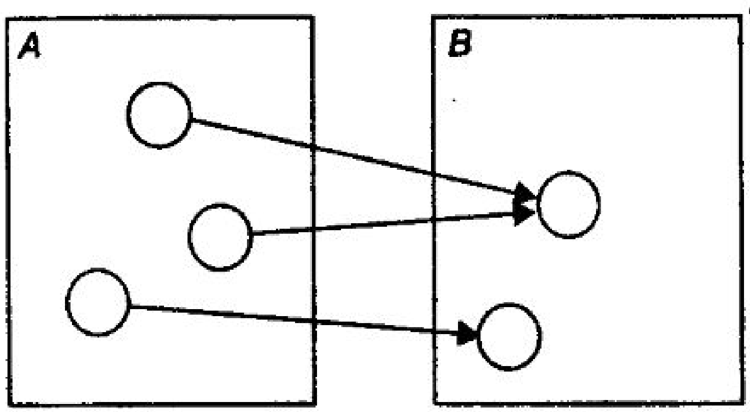
5. Объясните, почему это…



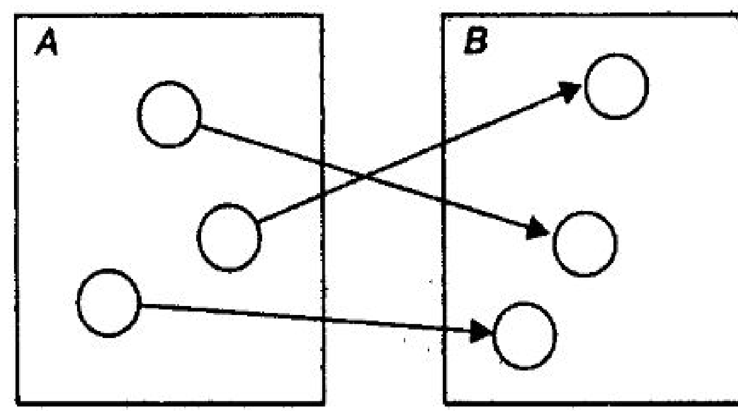
Отношение, но не функция



Инъекция, но не сюръекция



Сюръекция, но не инъекция



Биекция

Домашнее задание

1. Список студентов – … между номером и фамилией, т.к. …
2. Соответствие между множеством студентов и множеством групп - … отображение, т.к. …
3. Соответствие между множеством студентов группы ПКС.15А и множеством преподавателей колледжа является (не является) сюръекцией, т.к. …
4. Является ли сюръекцией соответствие между множеством предметов в Вашей зачетке и множеством оценок $\{3, 4, 5\}$? Почему?

Домашнее задание

5. Отображение множества студентов данной аудитории на множество стульев - …, т.к. ….
6. Отображение множества студентов колледжа на множество имен является или не является инъекцией? Почему?
7. $f: X \to Y$, где X – множество экзаменов, Y – множество оценок.
8. Определить множества, на которых отображение $f(x) = x^2$ является биекцией.